

NADSTAVBOVÝ KURZ ČESKÉHO JAZYKA A MATEMATIKY PRO ŽÁKY 5. TŘÍD ZŠ

řešení 3. sady – matematika (geometrie) A

1. „Měříme a počítáme“

Každé léto napouští dědeček vnoučatům bazén. Do bazénu přiteče každých 5 minut 325 litrů vody. Kolik hektolitrů přiteče do bazénu za hodinu, pokud se rychlost napouštění vody nezmění?

Řešení:

Jestliže za 5 minut přiteče 325 l vody, pak za jednu minutu přiteče pětkrát méně, tedy 65 l vody ($325 : 5 = 65$). Protože 1 hodina je 60 minut, za jednu hodinu přiteče 60krát víc, tedy 3 900 l vody ($60 \cdot 65 = 3\,900$). To je 39 hl vody za jednu hodinu.

Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto:

za 5 minut přiteče : 325 l
za 1 minutu přiteče : $325\text{ l} : 5 = 65\text{ l}$
za 1 hodinu (60 minut) přiteče : $60 \cdot 65\text{ l} = 3\,900\text{ l} = \underline{\underline{39\text{ hl}}}$
Za jednu hodinu přiteče 39 hl vody.

NEBO:

za 5 minut přiteče : 325 l
za 10 minut přiteče : $2 \cdot 325\text{ l} = 650\text{ l}$
za 60 minut přiteče : $6 \cdot 650\text{ l} = 3\,900\text{ l} = \underline{\underline{39\text{ hl}}}$
(60 min = 1 h)
Za jednu hodinu přiteče 39 hl vody.

2. „Chvátám, chvátám...“

Žanda jezdí za babičkou autobusem, ale může jít také pěšky. Když jede za babičkou autobusem a od babičky zpátky jde pěšky, trvají jí obě cesty dohromady 86 minut. Když jede obě cesty autobusem, trvají jí celkem 44 minut. Kolik minut trvá Žandě cesta k babičce a zpět, pokud jde obě cesty pěšky? Počítej s tím, že doba Žandiny chůze je v obou směrech stejná, stejně tak i doba jízdy autobusem.

Řešení:

Pokud Žanda jede k babičce i zpátky domů autobusem, trvá jí cesta 44 minut. To znamená, že pokud je doba jízdy tam i zpět stejná, trvá jedna cesta autobusem polovinu času, což je 22 minut ($44 : 2 = 22$).

Nyní se zaměříme na situaci, kdy Žanda jednu cestu jede autobusem a druhou jde pěšky. Celkem stráví cestováním 86 minut, z toho 22 minut jízdou autobusem. Pěší chůze jí tedy trvá zbytek z 86 minut, což je 64 minut ($86 - 22 = 64$).

Pokud jde tedy Žanda obě cesty pěšky, trvá jí to dvakrát tak dlouho, což je 128 minut ($2 \cdot 64 = 128$). To je víc než dvě hodiny 😊

Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto:

The handwritten solution is organized into three boxes with arrows indicating direction (TAM for 'there', ZPÁTKY for 'back').

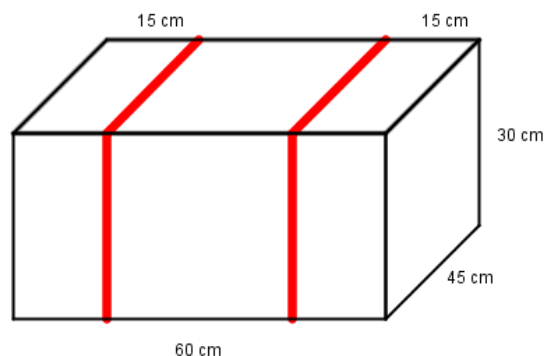
Top Left Box: Shows a bus going both ways. Text below: celkem 44 minut, takže 1 jízda autobusem trvá $44 \text{ min} : 2 = 22 \text{ min}$.

Top Right Box: Shows a bus going 'TAM' and walking 'ZPÁTKY'. Text below: celkem 86 minut, autobusem jede 22 minut, takže pěšky jde $86 \text{ min} - 22 \text{ min} = 64 \text{ min}$.

Bottom Box: Shows walking both ways. Text below: 1 cesta pěšky trvá 64 minut, 2 cesty pěšky trvají 128 minut. Když jde Žanda obě cesty pěšky, trvá jí cesta 128 minut.

3. „Lemy a okraje“

Firma Bajaja se zabývá zábavou pro děti. Prodává hračky a rovněž buduje dětská hřiště na přání. Například dnes balí hračky do stejných krabic s rozměry 60 cm, 45 cm a 30 cm, každou převážou kolem dokola dvěma ozdobnými pásky, které jsou 15 cm od kraje krabice. Jednu takto zabalenou krabici i s rozměry vidíš na obrázku.



Na každý spoj („svázání“) pásky je potřeba dalších 7 cm pásky. Kolik ozdobné pásky dnes spotřebovali, pokud víš, že takovýchto krabic dnes připravovali 14?

Řešení:

Rozměr krabice 60 cm nepotřebujeme, protože po této hraně není vedená žádná ozdobná páska. Stejně tak nepotřebujeme vědět, že ozdobné pásky jsou 15 cm od kraje krabice.

Tyto ozdobné pásky jsou na každé krabici dvě a na obě se spotřebuje stejná délka pásky. Na jedno převázání je potřeba $45 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 45 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 157 \text{ cm}$ pásky (dvě výšky krabice, dvě šířky krabice a 7 cm na spojení obou konců).

Na jednu krabici je spotřeba pásky dvojnásobná, tedy 314 cm ($2 \cdot 157 = 314$).

Krabic bylo 14, takže celkem 14krát víc, než je potřeba na jednu krabici. To je $14 \cdot 314 \text{ cm} = 4\,396 \text{ cm}$.

Dnes ve firmě Bajaja spotřebovali $4\,396 \text{ cm}$ ozdobné pásky. To je skoro 44 metrů 😊

Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto:

1 převázání:
 $2 \cdot 30 \text{ cm} + 2 \cdot 45 \text{ cm} + 7 \text{ cm} =$
 $= 60 \text{ cm} + 90 \text{ cm} + 7 \text{ cm} =$
 $= \underline{157 \text{ cm}}$

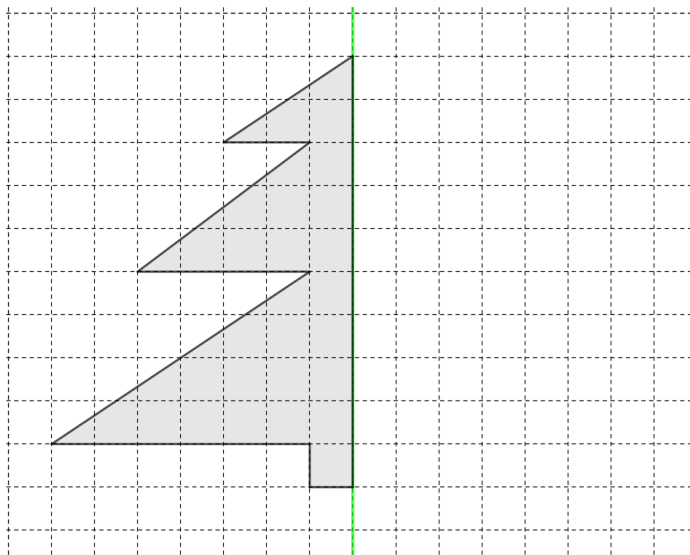
2 převázání (1 krabice):
 $2 \cdot 157 \text{ cm} = \underline{314 \text{ cm}}$

14 krabic: $14 \cdot 314 \text{ cm} = \underline{4\,396 \text{ cm}}$

Na 14 krabic dnes spotřebovali $4\,396 \text{ cm}$ ozdobné pásky.

4. „Obrázky (nejen) ve čtvercové síti“

Žáci třídy 5.M připravovali budoucím prvňáčkům k zápisu různé obrázky. Jedním z nich byl i stromeček. Nejdřív si připravili šablonu. Na čtverečkový papír si sestrojili polovinu stromečku, druhou polovinu sestrojili osově souměrně podle vyznačené (zelené) osy. Připravenou šablonu vystřihli a poté překreslovali na zelenou čtvrtku. Jaký byl obsah jednoho hotového (zeleného) stromečku? Jeden čtvereček sítě má obsah 1 cm^2 .



Řešení:

Nejdřív si dokreslíme druhou část stromečku.

Jako další krok si stromeček „rozstříháme“ na jednotlivé větve. Větve pravé části se dají přesunout do levé a připojit k odpovídajícím levým větvím. Pokud bychom měli papír z jedné strany zelený a z druhé (rubové) bílý, viděli bychom, že přesunutá část ještě navíc byla překlopená rubovou (bílou) stranou nahoru.

Těmito přesuny jsme získali čtyři obdélníky:

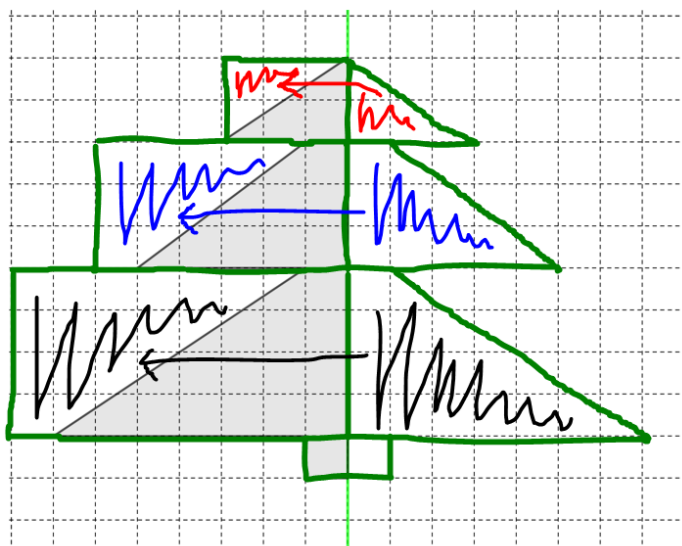
Červený má rozměry 3 cm a 2 cm a obsah 6 cm^2 ($3 \cdot 2 = 6$).

Modrý má rozměry 6 cm a 3 cm a obsah 18 cm^2 ($6 \cdot 3 = 18$).

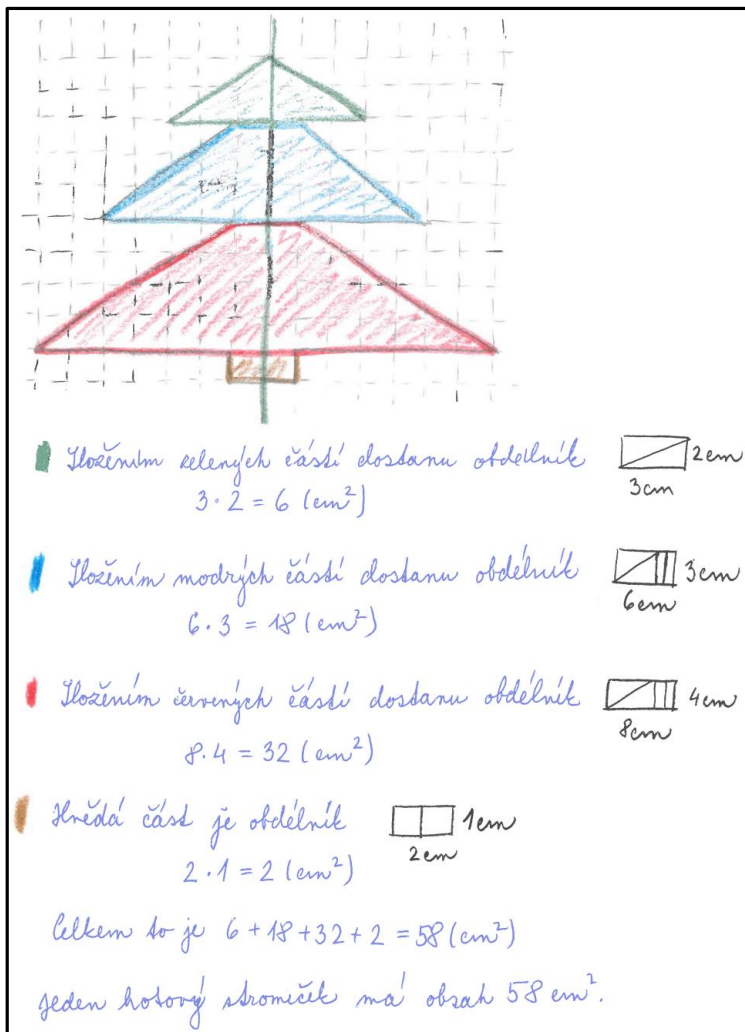
Černý má rozměry 8 cm a 4 cm a obsah 32 cm^2 ($8 \cdot 4 = 32$).

Poslední obdélník představuje původní kmínek. Má rozměry 2 cm a 1 cm a obsah 2 cm^2 ($2 \cdot 1 = 2$).

Celý stromeček má obsah 58 cm^2 ($6 + 18 + 32 + 2 = 58$).



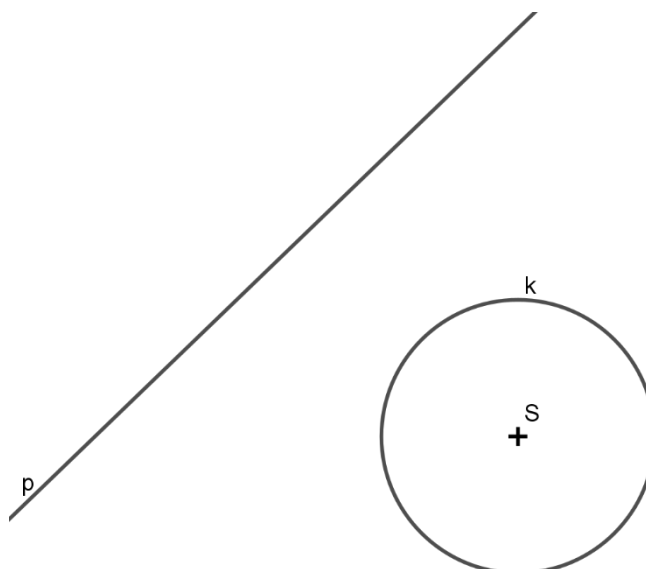
Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto, viz další stránku.



5. „Konstrukce – rýsování“

Na obrázku je přímka p a kružnice k se středem S . Sestrojte čtverec $ABCD$ nejmenšího možného obsahu tak, aby úhlopříčka AC ležela na přímce p a bod B ležel na kružnici k .

Tip: Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, jsou stejně dlouhé a půlí se.



Řešení:

Využijeme nápovědu u zadání. Znamená to, že když budou vrcholy A a C ležet na přímce p , pak vrcholy B a D budou ležet na přímce, která je k přímce p kolmá.

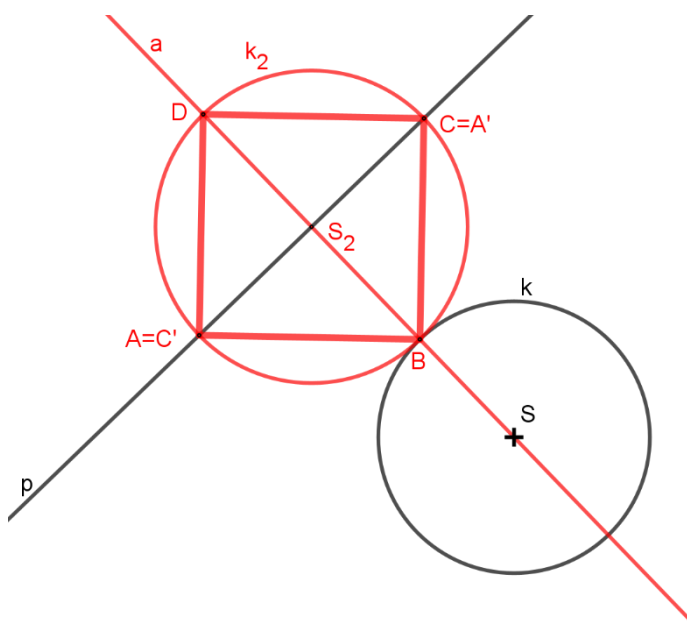
Když má mít čtverec co nejmenší obsah, musí mít také co nejkratší stranu a tedy i co nejkratší úhlopříčky. Takže vrchol B , který leží na kružnici k , musí ležet co nejbliž přímce p . Je to ten bod kružnice k , který leží na kolmici k přímce p , která prochází středem S kružnice k . Ten druhý, vzdálenější průsečík téhle kolmice a kružnice, by zase byl vrcholem čtverce s největším obsahem, protože je od přímky p nejdál.

Průsečík téhle kolmice (v obrázku je označená a) a přímky p je střed hledaného čtverce.

Zbývající vrcholy jsou od tohoto středu (označeného S_2) stejně daleko jako bod B , leží tedy na kružnici se středem S_2 , která prochází bodem B .

Postup konstrukce:

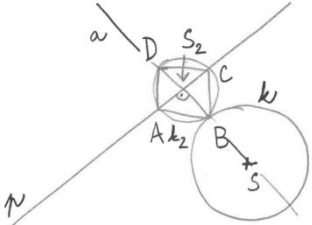
- 1) Sestrojíme přímku a , která prochází středem S a je kolmá na přímku p .
- 2) Průsečík přímky a a přímky p označíme S_2 (je to střed hledaného čtverce).
- 3) Průsečík přímky a a kružnice k , který je blíže přímce p , označíme B (je to vrchol hledaného čtverce).
- 4) Sestrojíme kružnici k_2 , která má střed S_2 a která prochází bodem B (leží na ní všechny vrcholy čtverce).
- 5) Kružnice k_2 a přímka a se protínají ve dvou bodech. Jedním z nich je bod B . Druhý označíme D (je to druhý vrchol hledaného čtverce).
- 6) Kružnice k_2 a přímka p se protínají ve dvou bodech. Jeden z nich označíme A . Druhý označíme C (jsou to poslední vrcholy čtverce).



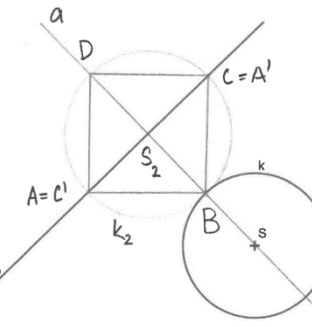
Počet řešení:

Protože při popisu vrcholu A si můžeme vybrat ze dvou vyhovujících bodů, má úloha (co se týká popisu čtverce) dvě řešení. Tyto dva čtverce jsou ale shodné a „leží jeden na druhém“.

Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto:



po 2 řešení, protože
můžeme zaměnit
vrcholy A a C.

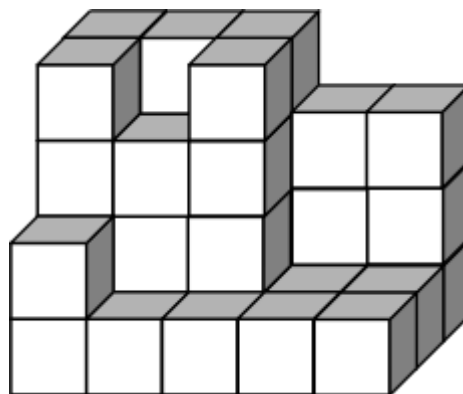


Úhlopříčky jsou kolmé,
takže BD je kolmá na
přímku p . Aby byl čtverec
co nejmenší, musí mít
nejkratší úhlopříčky.
Proto B leží co nejblíže p .
Bod kružnice nejlépe přímce,
leží na kolmici k p , která
prochází středem S .

- 1) kolmice a na p , prochází S
- 2) průsečík a a p je střed
čtverce S_2
- 3) průsečík a a k blíže k p
je vrchol B
- 4) A, C, D leží na kružnici k_2
se středem S_2 a poloměrem $|S_2B|$
- 5) A, C leží na p a na k_2
- 6) D leží na a a na k_2

6. „Stavba z krychliček“

U následující stavby spočítejte počet krychliček, ze kterých se skládá. Krychle nejsou slepené, krychle ve vyšším patře má vždy pod sebou další krychli. V dolním patře je právě 15 krychlí.



Řešení:

Pokud je v dolním patře 15 krychlí, vidíme nejvyšší krychli z každého „komínku“ (to znamená, že žádná krychle ani „malý komínek“ nejsou schované za stavbou).

Můžeme postupovat různě; výhodné je například představit si, že tuto stavbu přenášíme a že vždy bereme a přesouváme celý „postavený komínek“ najednou. Vidíme (třeba vpravo na nejvzdálenějším komínku), že nejvyšší komínky jsou sestavené ze čtyř krychlí (komínek vpravo vzadu je postavený ze tří krychlí a nejvyšší komínky jsou ještě o jednu krychli vyšší). Pokud bychom „četli“ počty krychlí v komínku po řadách zleva doprava, dostali bychom:

Zadní řada: 4, 4, 4, 3, 3

Prostřední řada: 4, 3, 4, 1, 1

Přední řada: 2, 1, 1, 1, 1

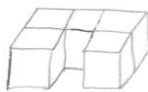
Celá stavba je tedy složená z 37 krychlí.

Jiný způsob řešení spočívá v rozkreslení jednotlivých pater stavby (tedy jako bychom ji vytvářeli „po patrech“). Najdete ho v „dětském řešení“.

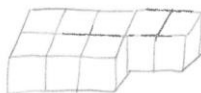
Řešitel může své úvahy a řešení zapsat například takto, viz další stránku.

Nakreslíme si, jak vypadají všechna 4 patra
starby:

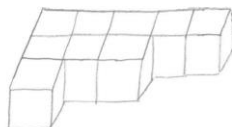
4. patro:
5 křehků!



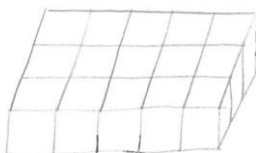
3. patro:
8 křehků!



2. patro:
9 křehků!



1. patro:
15 křehků!



celkem: $5 + 8 + 9 + 15 = 37$

Starba je postavena z 37 křehků!

